

---

# INTERPOLACE MĚR PLODNOSTI PODLE VĚKU V ČR POMOCÍ KVADRATICKÝCH SPLINŮ VE VYBRANÝCH LETECH

---

Filip Hon<sup>1)</sup> – Jitka Langhamrová<sup>2)</sup>

---

INTERPOLATING AGE-SPECIFIC FERTILITY RATES IN THE CZECH REPUBLIC USING  
THE QUADRATIC SPLINE MODEL IN SELECTED YEARS

## **Abstract**

The aim of this paper is to contribute to fertility research on women in the Czech Republic from a new perspective. The Quadratic spline model, a modern statistical method designed for the purpose of analysing age-specific fertility rates, is presented in the paper and tested on data for the Czech Republic. Attention is also devoted to the development of this model's parameters since the Velvet Revolution in 1989. The final part focuses on estimating age-specific fertility rates, which is one of the practical uses of this model.

**Keywords:** Age-specific fertility rates, statistical modeling, projection,  
second demographic transition

Demografie, 2020, 62: 71–88

---

## ÚVOD

Příspěvek má za cíl, na základě dat Českého statistického úřadu, vyzkoušet interpolační schopnosti jednoho z moderních statistických nástrojů k modelování měř plodnosti podle věku v našem prostředí.

Myšlenka modelování měř plodnosti podle věku statistickými metodami, je už od třicátých let dvacátého století postupně rozvíjena mnoha autory, využívajícími pro tento účel znalosti z různých odvětví statistiky. Jedná se, buď o navržení nových způsobů modelování, případně jejich aplikaci, či modifikaci pro zajištění lepší použitelnosti starších modelů i při aktuálním rozložení měř plodnosti dle věku v demograficky vyspělých zemích (např. *Wicksell*, 1931; *Hadwiger*, 1940; *Brass*, 1960; *Mazur*, 1963; *Gilks*, 1986;

*Romaniuk*, 1973; *Coale – Trussell*, 1974; *McNeil et al.*, 1977; *Hoem et al.*, 1981; *Booth*, 1984; *Chandola et al.*, 1999; *Schmertmann*, 2003; *Peristera – Kostaki*, 2007; *De Beer*, 2011; *Mishra et al.*, 2017).

V tomto příspěvku bude zaměřen pohled na model, který je představen, podrobně statisticky definován a demonstrována jeho úspěšnost při interpolaci měř plodnosti podle věku na více, než dvou stech datasetech v *Schmertmannově* příspěvku „A system of model fertility schedules with graphically intuitive parameters“ (*Schmertmann*, 2003). Kromě popisu a používání modelu se autor také věnuje usnadnění jeho používání, jak dokazuje například internetový generátor který je součástí publikace „Quadratic spline fits by nonlinear least squares“ (*Schmertmann*, 2005)

---

1) Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky, Katedra demografie; kontakt: xhonf01@vse.cz.

2) Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky, Katedra demografie; kontakt: jitka.langhamrova@vse.cz.

a zveřejnění postupu výpočtu ve statistickém programu Rstudio v příspěvku „Quadratic Spline Interpolation of Fertility Schedules“ (Schmertmann, 2017).

Modelování měr plodnosti podle věku pomocí kvadratických splinů a definovaných uzlových bodů, jak se částečně ukáže i při analýze na datech České republiky, samozřejmě není bez nedostatků. V některých případech může být model málo flexibilní. Zejména v případech, kdy křivka měr plodnosti podle věku nemá klasický tvar předpokládaný vzhledem k poloze uzlových bodů, není interpolace dostatečně přesná. Například v případě zemí, jako je USA, kde se objevují vyšší míry plodnosti podle věku i u žen v nízkém věku a mění se tedy tvar této křivky. Z podobných příčin model také, v některých případech, hůře interpoluje plodnost na konci reprodukčního období a vykazuje horší výsledky v případě využití modelu na kohortní data (Peristera – Kostaki, 2007).

Do určité míry nedostatečná flexibilita brání modelu uskutečňovat nereálné odhady v případě, kdy jsou v pozorovaných mírách plodnosti podle věku výrazné odchylky. Zároveň je také na rozdíl od například některých starších modelů dostatečně flexibilní na to, aby dokázal interpolovat rozložení měr plodnosti u demograficky vyspělých zemí nejen v minulosti, ale i v současnosti (Schmertmann, 2003). Jak bude vidět v následujícím textu, model je tedy dostatečně flexibilní, aby dokázal interpolovat vybrané roky, které jsou v případě České republiky právě typické pro výrazné změny, vzniklé kombinací intenzity a časování u transversálních ukazatelů (Sobotka et al., 2008).

Tato cíleně optimalizovaná flexibilita v kombinaci s tím, že je model postaven na snadno interpretovatelných parametrech, dělá model oproti jiným podobným modelům dobře využitelný pro projekce i pro prognózy (např. Schmertmann, 2003; Lipps – Betz, 2004; De Beer, 2011) a může být vzhledem k nedávnému vývoji měr plodnosti podle věku v České republice zajímavou a užitečnou alternativou. Velmi flexibilní modely totiž mohou v případě České republiky i v krátkodobém horizontu dávat demograficky nepřiliš reálné výsledky, které se týkají míry plodnosti v modálním věku nebo plodnosti po čtyřicítce (např. Šimpach, 2015a; Šimpach, 2015b; Hon, 2020).

Interpolace měr plodnosti podle věku pomocí tohoto modelu je potom aplikována v celé řadě

vědeckých příspěvků. Zmínit je možné například použití modelu v různých studiích Eurostatu (např. Ediev, 2013; Lanzieri, 2011), různé knižní publikace (např. Gupta, 2012) nebo různé modifikace modelu například k interpolaci týdenní úmrtnosti na základě dat za jednotlivé měsíce (Cilek et al., 2018) a mnoho dalších.

První oddíl je věnován metodologii a podává informace o statistickém odvození zkoumaného modelu. Následně je vyzkoušena schopnost interpolace modelu na mírách plodnosti podle věku ve čtyřech vybraných letech symbolizujících změnu reprodukčního chování obyvatel České republiky v posledních desetiletích. V další části textu, je naznačeno několik scénářů možného budoucího vývoje měr plodnosti podle věku na základě projekce hodnot parametrů modelu.

## METODOLOGIE

Schmertmannův model je založen na myšlence, že z demografické praxe je možné odhadnout pravděpodobný průběh měr plodnosti podle věku pro všechny věky reprodukčního období ženy pouze na základě několika hodnot. V hodnotách měr plodnosti podle věku existuje nějaká biologická zákonitost, se kterou je možné počítat. Například v žádné populaci se nestane, aby nejvyšší míra plodnosti podle věku byla ve věku například čtyřicet let a ve věku sousedícím byla naopak nulová.

Na základě této myšlenky, že míry plodnosti podle věku jsou podobným způsobem omezené, lze potom prostřednictvím několika málo parametrů s velkou přesností interpolovat průběh křivky měr plodnosti podle věku. Konkrétně, na základě hodnot parametrů modelu je možné odvodit uzlové body, díky kterým je možné míry plodnosti podle věku bez ohledu na stádium demografického vývoje zkoumané země zobrazit jako křivku pomocí funkce využívající kvadratické spliny (anglicky „quadratic spline“, pro model je často používána zkratka „QS model“, která bude místy využita i v tomto příspěvku). Regresní spliny se využívají v případě, kdy je vhodné zvětšit flexibilitu statistického modelování tím, že je křivka modelována po částech více regresními funkcemi. Hranice mezi jednotlivými sekcemi, se nazývají uzlové body. Statisticky přesnější definice bude patrná

ze vzorců uvedených níže. Metodologie zde popsaná je převzata z příspěvku, kde je model představen a podrobně definován (Schmertmann, 2003).

Stěžejní parametry modelu se dají definovat následujícím způsobem:

α, je nejnižší věk, ve kterém není míra plodnosti podle věku nulová,

P, je věk, ve kterém je míra plodnosti podle věku nejvyšší,

H, věk kdy hodnota míry plodnosti klesne na polovinu po dosažení maxima.

K modelování křivky, je ještě potřeba ukazatel úrovně:

R je hodnota míry plodnosti v modálním věku P, následně je možné sestavit rovnici:

$$f(x) = R\phi(x),$$

kde  $f(x)$  označuje pro všechna  $x$  funkci měř plodnosti dle věku,  $\phi(x)$  potom označuje funkci, která určuje tvar křivky (který je v tomto modelu definovaný pomocí α, P, H a uzlovými body) a R je parametrem úrovně.

Jinak řečeno, k určení všech měř plodnosti podle věku, je potřeba znát pouze tyto uvedené hodnoty, zbytek je možné modelovat. To samozřejmě usnadňuje například projekci budoucích měř plodnosti podle věku, protože je potřeba pouze odhadnout časovou řadu vývoje jednotlivých parametrů (Lipps – Betz, 2004).

Tyto parametry jsou pochopitelně viditelné pouhým okem na grafu měř plodnosti podle věku ve zvoleném roce. Ještě je však dobré dodat, že parametry se zpřesňují pomocí iterací minimalizujících čtvercovou chybu (Hoem et al., 1981; Schmertmann, 2003), postup je uplatněn i v tomto příspěvku. Ve vzorcovém vyjádření se tedy minimalizuje výraz:

$$SSE = \sum_x (\hat{f}_x - f_x)^2,$$

kde  $\hat{f}_x$  je modelem odhadnutá míra plodnosti ve věku  $x$  a  $f_x$  je pozorovaná míra plodnosti ve věku  $x$ . V tomto kontextu je možné definovat také ukazatel relativní chyby:

$$RE = 100(\sum_x |\hat{f}_x - f_x|) / (\sum_x f_x),$$

který je určený k měření úspěšnosti interpolace v každém konkrétním případě.

Samotný tvar křivky je možné podrobněji definovat jako kvadratický spline:

$$\phi(x) = \begin{cases} \sum_{k=0}^4 \theta_k (x - t_k)_+^2, & \alpha \leq x \leq \beta, \\ 0 & \text{mimo meze intervalu,} \end{cases}$$

přičemž pro uzlové body platí, že  $t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ , spadají do intervalu mezi α a β a  $(x - t_k)_+ = \text{MAX}[0; x - t_k]$ . Je vhodné poznamenat, že z uvedených výrazů lze vyjádřit výpočet úhrnné plodnosti jako:

$$\begin{aligned} \text{úhrnná plodnost} &= \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = R \int_{\alpha}^{\beta} \phi(x) dx \\ &= \frac{R}{3} \sum_{k=0}^4 \theta_k (\beta - t_k)^3. \end{aligned}$$

Funkce  $f(x)$ , je ve všech uzlových bodech spojitá, pro úplnost je vhodné uvést také první a druhou derivaci funkce:

$$f'(x) = R\phi'(x) = 2R \sum_{k=0}^4 \theta_k (x - t_k)_+, \quad \alpha \leq x \leq \beta,$$

$$f''(x) = R\phi''(x) = 2R \sum_{k=0}^4 \theta_k I[x > t_k], \quad \alpha \leq x \leq \beta,$$

první derivace funkce je spojitá, druhá derivace funkce je nespojitá,  $I[\cdot]$  je v případě pravdivosti podmínky  $x > t_k$  rovna jedné, v ostatních případech je nulová.

Je současně možné konstatovat  $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$  díky tomu, že  $t_0 = \alpha$ , z tohoto bodu vychází pochopitelně první parabola, která je až do  $t_1$  rostoucí. Stejně jako v případě dalších uzlových bodů, parametr  $\theta$  definuje tvar této paraboly, celkový kontext je patrný ve vzorci týkající se druhé derivace (Schmertmann, 2003).

Při použití výše uvedených parametrů α, P, H a R, je možné sestavit základní předpoklady modelu:

- 1) Uzlový bod 0 se nalézá v nejnižším věku, ve kterém není míra plodnosti podle věku nulová,  $t_0 = \alpha$ , kde  $t$  je označení uzlového bodu.
- 2) Uzlový bod 1 je mezi věky α a P,  $t_1 = (1 - W) \alpha + WP$ , kde  $W = \min[0,75; 0,25 + 0,025(P - \alpha)]$ .
- 3) Uzlový bod 2 je ve věku P, kdy je míra plodnosti podle věku nejvyšší,  $t_2 = P$ .
- 4) Uzlový bod 3 je přesně uprostřed mezi věky P a H,  $t_3 = (P + H)/2$ .
- 5) Reprodukce je ukončena ve věku β, tedy nejčastěji v padesáti letech s možnými výjimkami

z důvodu špičatosti rozdělení měř plodnosti podle věku:

$$\beta = \begin{cases} 50 & \text{když } H + \frac{1}{3}(H - P) \leq 50 \leq H + 3(H - P), \\ H + \frac{1}{3}(H - P) & \text{když } H + \frac{1}{3}(H - P) > 50, \\ H + 3(H - P) & \text{když } H + 3(H - P) < 50. \end{cases}$$

- 6) Uzlový bod 4 je přesně uprostřed mezi věkem H a věkem  $\beta$ , kdy je reprodukce ukončena a míra plodnosti podle věku je poprvé od věku  $\alpha$  mínus jedna nulová,  $t_4 = (H + \beta)/2$ .
- 7) Je stanoven předpoklad o plodnosti ve věcích P, H a  $\beta$ ,  $\phi(P)=1$ ,  $\phi(H)=0,5$ ,  $\phi(\beta)=0$ .
- 8) Směrnice křivky je nulová ve věcích P a  $\beta$ ,  $\phi'(P)=0$ ,  $\phi'(\beta)=0$ .

Nyní, když jsou vymezeny podmínky, lze definovat soustavu rovnic:

$$\begin{bmatrix} (P - \alpha)^2 & (P - t_1)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (H - \alpha)^2 & (H - t_1)^2 & (H - t_2)^2 & (H - t_3)^2 & 0 & 0 \\ (\beta - \alpha)^2 & (\beta - t_1)^2 & (\beta - t_2)^2 & (\beta - t_3)^2 & (\beta - t_4)^2 & 0 \\ 2(P - \alpha) & 2(P - t_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2(\beta - \alpha) & 2(\beta - t_1) & 2(\beta - t_2) & 2(\beta - t_3) & 2(\beta - t_4) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

respektive přehledněji:

$$A\theta = k,$$

za předpokladu demograficky obvyklého rozdělení A není singulární maticí.

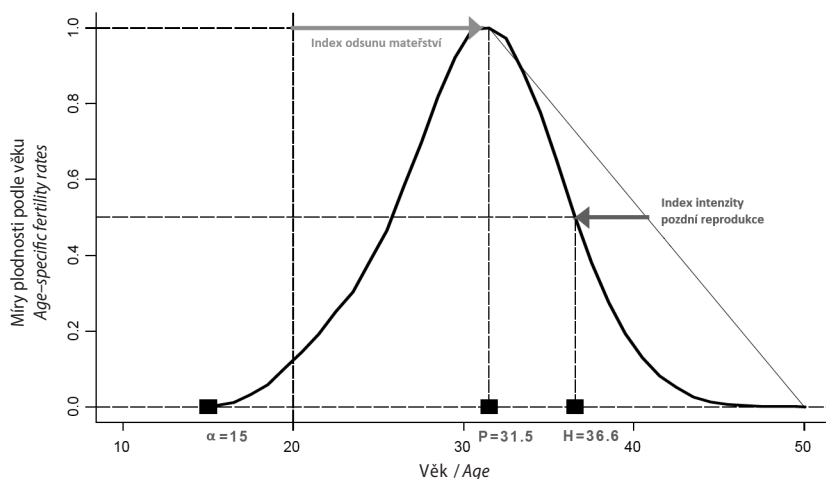
S moderním statistickým softwarem, není problém uvedenou soustavu rovnic řešit a parametr  $\theta$  z rovnic uvedených výše, lze následně vyjádřit:

$$\theta(\alpha, P, H) = A^{-1} k,$$

vzhledem k tomu, že pozice uzlových bodů je potom určena přímo výše uvedenými podmínkami, je na základě řečeného definováno vše nezbytné k interpolaci měř plodnosti tímto modelem (Schmertmann, 2003).

Závěrem k metodologii je vhodné zmínit, že pomocí modelu lze také získat dva indexy, které dokáží stručně charakterizovat, v jaké fázi demografického vývoje se z hlediska plodnosti země nachází. Pro lepší pochopitelnost významu těchto indexů je zde jako ilustrativní příklad uveden graf 1. Jako první je možné definovat takzvaný delay index (D). Jak překlad názvu z angličtiny napovídá, jedná se o ukazatel shrnující, o kolik se posunul věk, kdy se ženy stávají matkami. Název indexu dosud nemá

**Graf 1: Míry plodnosti podle jednotek věku v Nizozemsku v roce 2001, standardizováno na hodnotu jedna ve věku P (modální věk měř plodnosti podle věku) / Single-year ASFR schedule for the Netherlands 2001, standardised at a value of mode = 1**



Zdroj: Schmertmann (2003), vlastní zpracování.  
Source: Schmertmann (2003), authors' processing.

český ekvivalent, vzhledem k jeho výpočtu, který je vidět níže, by bylo možné nazvat D například indexem odsunu mateřství. Vypočítat ho je totiž možné jednoduchým způsobem:

$$D = P - 20,$$

kde D je označení tohoto indexu a P je shodné s parametrem uvedeným výše. Hodnota dvaceti je zde nastavená napevno jako věk, který odpovídá maximu rozložení měr přirozené plodnosti (Coale – Trussell, 1974).

Pro názornost, pokud by byl věk, kdy je míra plodnosti podle věku nejvyšší přesně třicet let, zpoždění charakterizované indexem odsunu mateřství by se, oproti hypotetické reprodukci ve dvaceti letech věku, rovnalo přesně deseti.

Druhý ukazatel, se nazývá stopping nebo control index a týká se plodnosti ve vyšším věku. Jeho matematické vyjádření je následující:

$$S = (P + 50)/2 - H,$$

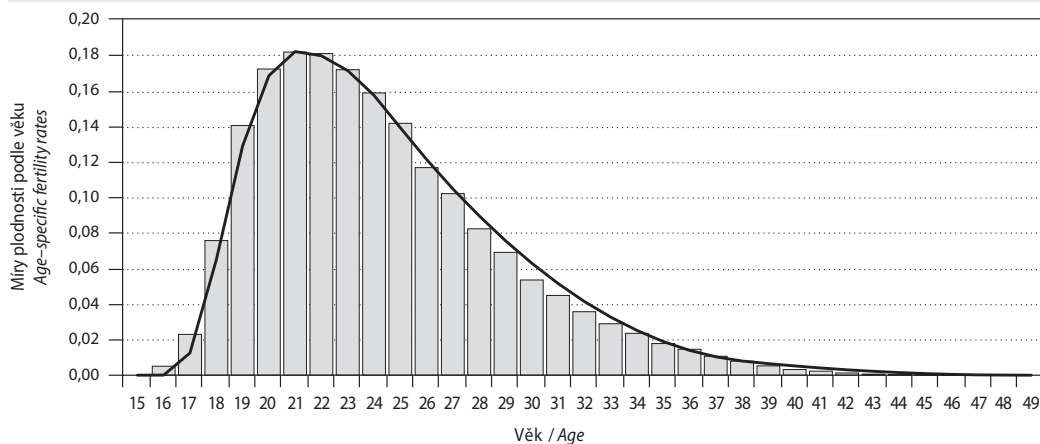
kde opět P a H reprezentuje již výše popsané parametry a S je označení pro tento index. Je logické, že pokud

by míry plodnosti podle věku klesaly od věku, kdy je plodnost nejvyšší do konce reprodukčního období zcela lineárně, bylo by H rovno výrazu  $(P + 50)/2$ . Index, jak ilustruje graf 1, vyjadřuje, o kolik let věku dříve míry plodnosti podle věku klesnou po modálním věku na polovinu oproti této hypotetické situaci (Schmertmann, 2003). Opět i zde chybí česká terminologie, vzhledem k tomu o čem ukazatel vypovídá, by se dal nazvat indexem intenzity pozdní reprodukce.

## INTERPOLACE MĚR PLODNOSTI PODLE VĚKU V ČR

V následujícím oddílu, bude vyzkoušena schopnost modelu interpolovat míry plodnosti podle věku v České republice. Výpočet je proveden na vybraných letech, ve kterých je dobře vidět vývoj křivky měr plodnosti dle věku po sametové revoluci v roce 1989, až do aktuálně posledních dostupných dat. Interpolace je provedena na základě doporučení a s pomocí Schmertmannova webového programu (Schmertmann, 2005), naprogramovaného přímo za tímto účelem ve webovém prohlížeči Internet Explorer. Je vhodné pro případné další zájemce o využití programu zmínit, že pro správnou funkčnost programu musí být

**Graf 2: Porovnání pozorovaných a QS modelem předpovězených měr plodnosti podle věku žen 15–49letých v České republice za rok 1989 / Comparison of observed and QS model–predicted age-specific fertility rates in the Czech Republic for 1989, women aged 15–49 years**



□ Pozorované míry plodnosti dle věku / Actual ASFR      — Předpovězené míry plodnosti dle věku / QS model predicted ASFR

Zdroj: ČSÚ, vlastní zpracování.  
 Source: CZSO, authors' processing.

v počítači nainstalována a správně nakonfigurována Java, jinak program pouze zobrazí prvotní odhad parametrů.

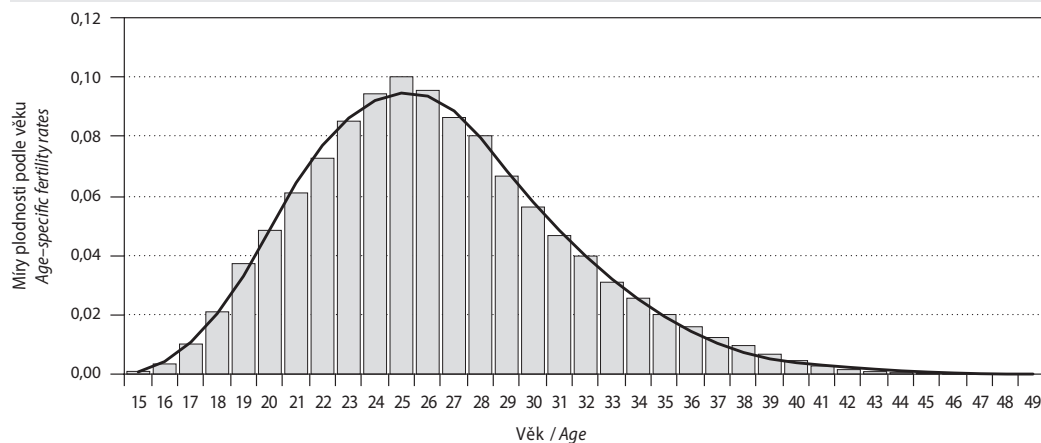
Jako první je uveden rok 1989, kdy proběhla sametové revoluce, po které následovaly v souvislosti se společenskými změnami také změny v reprodukčním chování obyvatel (Sobotka *et al.*, 2008). Dále jsou zobrazeny roky v desetiletém odstupu, k evidování průběhu změn v mírách plodnosti podle věku směrem k současnosti. Jako poslední je zde graf za aktuálně nejnovější dostupná data z roku 2018. Ještě je nezbytné dodat, že při odhadu křivky předpovězených měr plodnosti podle věku je na vodorovné ose postupováno po jednotkách věku. V důsledku toho, je sice křivka méně hladká, než kdyby byl zvolen interval menší, ovšem zase je možné hodnoty lépe porovnat se skutečnými mírami plodnosti podle věku v příslušných letech.

Na grafu 2 je vidět, že model opravdu dokáže pouze za pomoci výše uvedených parametrů poměrně přesně odhadnout míry plodnosti podle věku. V době sametové revoluce ještě samozřejmě nebylo odkládání mateřství ve společnosti tak časté jako dnes (Sobotka *et al.*, 2008). I tuto skutečnost dokázal model interpolovat, kdy je vidět dobrý odhad plodnosti

v mladém věku. Křivka se, téměř dokonale, kryje s pozorovanými mírami plodnosti podle věku kolem dvaceti let věku, kdy byla plodnost nejvyšší. Věrně zachytává i rychlý vzrůst naměřených hodnot ve věcích nejmladších. Horší je to s mírami plodnosti kolem třiceti let věku. Je patrné, že model zde míry plodnosti podle věku systematicky nadhodnocuje. Rozdíly nejsou nijak výrazné, přesto by se evidentně v tomto případě k lepší interpolaci modelem hodil větší počet uzlových bodů v této části křivky.

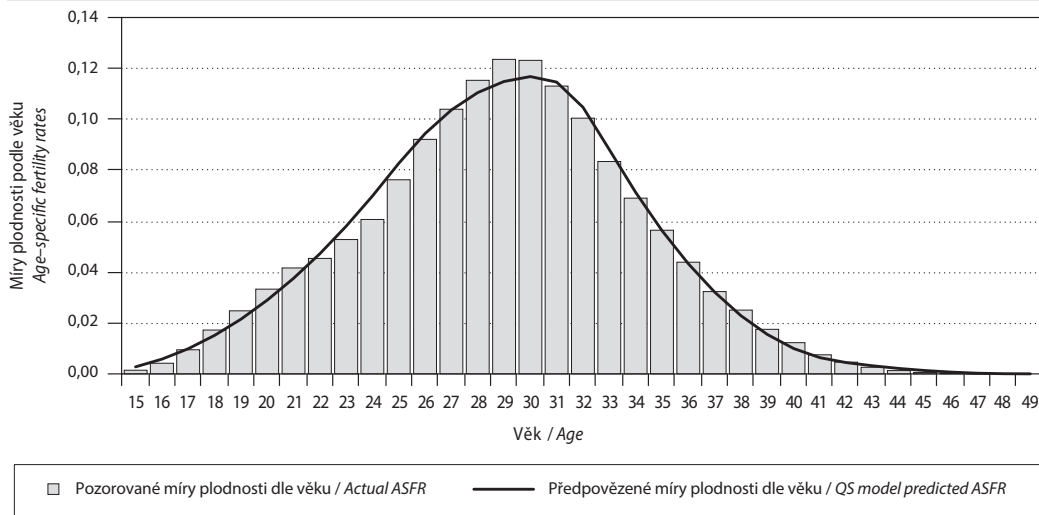
Na mírách plodnosti podle věku za rok 1999, zobrazených v grafu 3, je vidět začátek odkládání mateřství do vyššího věku. Také je zde na svislé ose vidět celkový pokles plodnosti v České republice (Sobotka *et al.*, 2008). I přesto však model pomocí parametrů, poměrně dobře, dokázal nasimulovat průběh měr plodnosti podle věku skrz jednotlivé věky. Vzhledem k iteraci hodnot parametrů tak, aby byla výsledná chyba na celé křivce co možná nejmenší, je tentokrát vidět, že model lehce podhodnocuje míru plodnosti podle věku kolem dvaceti pěti let věku, kdy bylo dosahováno nejvyšších hodnot. Na druhou stranu, tentokrát se už u modelu nevyskytuje systematické nadhodnocování měr plodnosti podle věku u žen, které realizují

**Graf 3: Porovnání pozorovaných a QS modelem předpovězených měr plodnosti podle věku žen 15–49letých v České republice za rok 1999 / Comparison of observed and QS model-predicted age-specific fertility rates in the Czech Republic for 1999, women aged 15–49 years**



Zdroj: ČSÚ, vlastní zpracování.  
Source: CZSO, authors' processing.

**Graf 4: Porovnání pozorovaných a QS modelem předpovězených měr plodnosti podle věku žen 15–49letých v České republice za rok 2009 / Comparison of observed and QS model–predicted age-specific fertility rates in the Czech Republic for 2009, women aged 15–49 years**

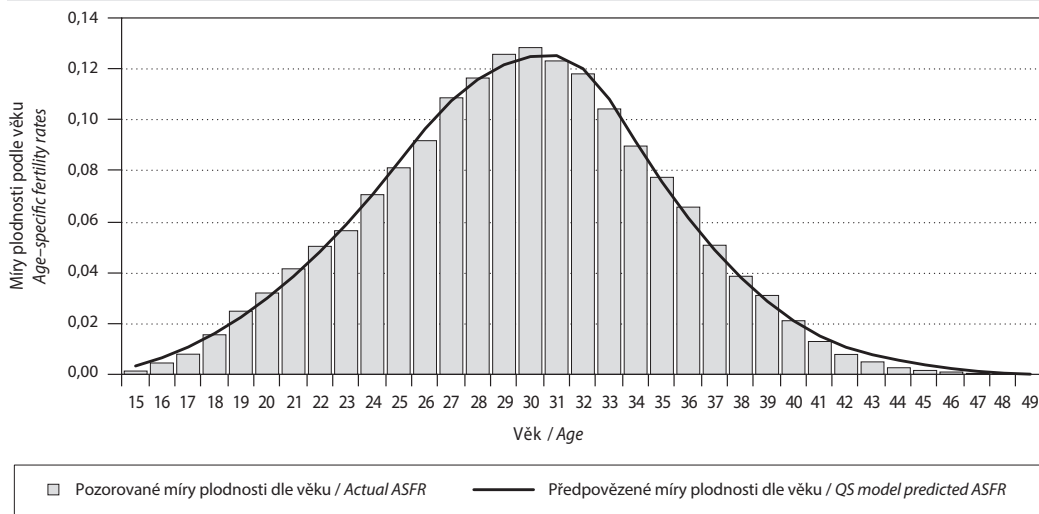


Zdroj: ČSÚ, vlastní zpracování.  
Source: CZSO, authors' processing.

reprodukcí ve vyšším věku. Naopak je zajímavé, že model při interpolaci lehce podhodnocuje plodnost žen před čtyřicátkou.

V roce 2009, který je vidět v grafu 4, byl průměrný věk při první reprodukci již vyšší, než dvacet sedm let (Fiala et al., 2018). Nepřekvapí tedy, že míry plodnosti

**Graf 5: Porovnání pozorovaných a QS modelem předpovězených měr plodnosti podle věku žen 15–49letých v České republice za rok 2018 / Comparison of observed and by QS model predicted age-specific fertility rates in the Czech Republic for 2018, women aged 15–49 years**



Zdroj: ČSÚ, vlastní zpracování.  
Source: CZSO, authors' processing.

podle věku českých žen, jsou na grafu nejvyšší kolem třiceti let věku. Oproti přelomu tisíciletí, také došlo ke zvýšení měr plodnosti podle věku v letech, kdy byla úroveň plodnosti v populaci nejvyšší. I přes tyto změny je možné interpretovat úspěšnost interpolace měr plodnosti podle věku, pomocí kvadratických splinů podobným způsobem jako v roce 1999. Opět se zde vyskytuje podcenění nejvyšších hodnot. Pouze je to tentokrát kolem třiceti let věku a rozdíl mezi pozorovanými a odhadnutými hodnotami je ještě výraznější, než v předchozím případě. Jinak opět křivka kopíruje hodnoty měr plodnosti podle věku ve většině případů úspěšně. Nadhodnocení je možné pozorovat současně u žen kolem dvaceti pěti let věku a u žen kolem třiatřiceti let. Zde je nutné si povšimnout, že se jedná o hodnoty obklopující věky, kdy byly míry plodnosti podle věku nejvyšší. V kombinaci s tím, že křivka systematicky podhodnocuje míry plodnosti podle věku ve věcích, kdy je úroveň plodnosti žen nejvyšší, lze logicky odvodit následující. Rozdělení měr plodnosti podle věku v České republice bylo v tomto roce až příliš špičaté na to, aby ho model dokázal dostatečně věrně zachytit.

Graf 5 již ukazuje aktuální situaci v České republice. Míry plodnosti podle věku se tentokrát už nemění oproti předchozímu sledovanému roku tak výrazně. Věk, kdy je dosahováno nejvyšších hodnot se ještě trochu posunul a pohybuje se kolem třiceti let. Model je, i při současných hodnotách, evidentně schopen na základě parametrů interpolovat skutečné míry plodnosti podle věku. Vyskytují se zde však podobné chyby, jako u křivky interpolující rok 2009. Na první pohled je vidět, že nejvyšší míry plodnosti podle věku kolem třiceti let jsou opět o trochu podhodnoceny. Tento problém zde však již není tak výrazný jako na grafu předchozím. Je to pochopitelné, protože

i při pohledu na graf je možné konstatovat, že rozdělení měr plodnosti podle věku se tentokrát již nevyznačuje tak velkou špičatostí jako v roce 2009. Pro zajímavost si ještě lze povšimnout, že křivka nadhodnocuje míry plodnosti podle věku těsně po začátku reprodukčního období ženy a naopak lehce podhodnocuje míry žen kolem dvaceti let věku.

Na schopnost interpolace měr plodnosti podle věku modelem, ve vybraných letech, je možné podívat se prostřednictvím ukazatelů uvedených v tab. 1. I při tomto celkovém pohledu je možné konstatovat, že model ve všech letech dokázal pomocí parametrů poměrně úspěšně odhadnout míry plodnosti podle věku v České republice. Větší relativní chyby se model dopustil v letech 1989 a 2009. V roce sametové revoluce na to bude mít vliv zejména výše popsané systematické nadhodnocování měr plodnosti u žen kolem třiceti let věku. V případě roku 2009, je možné spatřovat hlavní příčinu v nedokonalém zachycení špičatosti rozdělení měr plodnosti podle věku.

Ve výsledku se odhadnutá úhrnná plodnost od skutečné v každém ze sledovaných let liší jen minimálně. Je to pochopitelné, protože když se model snaží minimalizovat celkovou chybu na celé křivce, zákonitě někde hodnoty o trochu podhodnotí a jinde nadhodnotí. Ve výsledku se ukázalo, že pomyslný součet hodnot nadhodnocených a součet těch podhodnocených je téměř stejný a rozdíly v úhrnných plodnostech se pohybují pouze v rozmezí setin.

Pro úplnost je ještě dobré uvést parametry, podle kterých byly výše analyzované křivky za jednotlivé roky modelem sestaveny, ukazuje je tab. 2. Kromě již komentovaných skutečností u parametru R, kde jsou vidět velice nízké hodnoty v roce 1999, je také možné povšimnout si toho, co nevyplývalo z grafů tak přehledně, jako z tab. 2.

**Tab. 1: Charakteristiky úspěšnosti interpolace měr plodnosti podle věku pomocí QS modelu**  
Performance characteristics of the interpolation of age-specific fertility rates using the QS model

Ukazatel / Index	Rok / Year			
	1989	1999	2009	2018
Relativní chyba (v %) / Relative error (in %)	5,85	4,11	5,84	4,23
Skutečná úhrnná plodnost / Actual TFR	1,87	1,13	1,49	1,71
Interpolovaná úhrnná plodnost / QS model – predicted TFR	1,89	1,13	1,49	1,72

Zdroj: ČSÚ, vlastní zpracování.

Source: CZSO, authors' processing.



**Tab. 2: Parametry QS modelu ve sledovaných letech / QS model parameters in the years under review**

Parametr / Parameter	Rok / Year			
	1989	1999	2009	2018
R	0,183	0,095	0,117	0,126
$\alpha$	16,817	14,870	13,298	13,044
P	21,500	25,755	30,789	31,258
H	28,376	31,598	35,342	36,393

Zdroj: ČSÚ, vlastní zpracování.

Source: CZSO, authors' processing.

**Tab. 3: Indexy vypočtené pomocí QS modelu ve sledovaných letech**

Indexes calculated using the QS model in the years under review

Ukazatel / Index	Rok / Year			
	1989	1999	2009	2018
D	1,5	5,8	10,8	11,3
S	7,4	6,3	5,1	4,2

Zdroj: ČSÚ, vlastní zpracování.

Source: CZSO, authors' processing.

Například dříve se parametry P a H měnily mezi dvěma obdobími o zhruba čtyři roky. Mezi lety 2009 a 2018 se však již změnilo pouze asi o jeden rok věku. I s přihlédnutím k tomu, že tentokrát nebylo mezi sledovanými roky deset let jako v předchozích případech, ale jednalo se o interval kratší, je možné konstatovat, že změna těchto parametrů se výrazně zpomalila. Podrobněji bude tento vývoj ještě rozebrán v dalším oddílu, který se speciálně věnuje analýze časových řad parametrů.

V tab. 3 jsou vypočteny indexy charakterizující změny v časování mateřství, o kterých již byla řeč v metodologické části. Index D nepřekvapivě v čase roste. Jak bylo vidět v části věnující se jeho výpočtu, je to vlastně parametr P zmenšený o dvacet a tak se samozřejmě podobně jako u parametru P jeho růst v posledních letech evidentně zpomaluje. Index intenzity pozdní reprodukce, značený jako S, se v průběhu času zmenšuje, což je samozřejmě důsledek jednak zvyšující se četnosti reprodukce ve vyšším věku a také toho, že parametr P se posunul do vyššího věku a blíže k věku padesáti let. Pomyslný bod na příjmu viditelný na grafu 1, na které by se nalézal parametr H, při této hypotetické situaci, tedy již logicky nemůže na vodorovné ose být tak daleko od reality jako dříve.

Na závěr oddílu je možné shrnout, že model prokázal schopnost dobře interpolovat míry plodnosti

podle věku v České republice ve všech sledovaných letech. Vždy měl však v určitých věcích tendenci lehce nadhodnocovat, nebo podhodnocovat sousedící hodnoty. V každém ze sledovaných let se pochopitelně vzhledem ke změnám v reprodukčním chování obyvatelstva České republiky jednalo o jinou část křivky.

To naznačuje, že tento problém je způsobený omezeným počtem uzlových bodů v modelu. V součtu však v žádném konkrétním roce nebyla celková chyba v interpolaci tak výrazná, aby se dal užitý postup označit za zcela nevhodný k modelování křivky měr plodnosti podle věku v České republice.

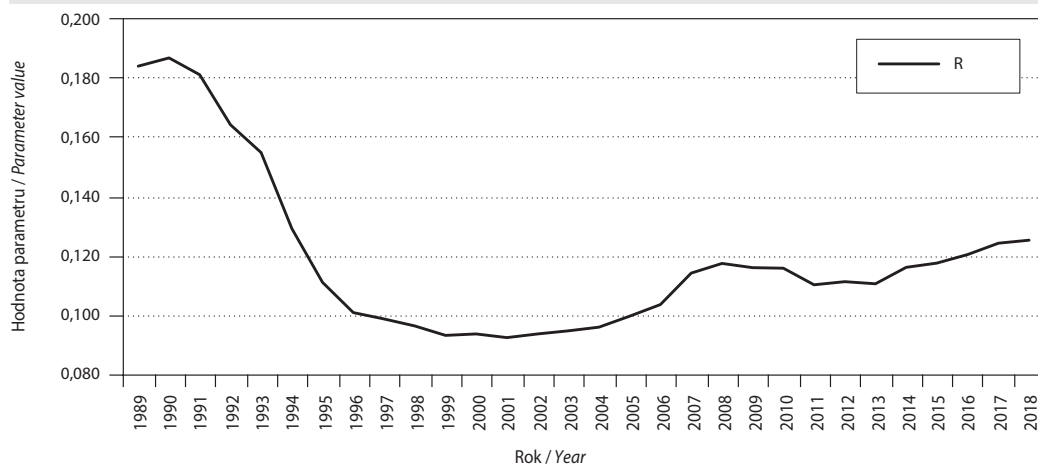
## VÝVOJ PARAMETRŮ QS MODELU PO ROCE 1989

Jak již bylo zmíněno výše, model je přímo určen pomocí několika parametrů. V této části bude z důvodu návaznosti ukázán vývoj parametrů R (míra plodnosti v modálním věku), P (modální věk měr plodnosti podle věku) a H (věk, kdy hodnota míry plodnosti klesne na polovinu po dosažení maxima). Na grafech jsou zobrazeny finální odhady parametrů, tedy po minimalizaci čtvercové chyby.

Jedním z možných využití Schmertmannova modelu, je totiž projektování budoucích měr plodnosti podle věku ve zvolené populaci prostřednictvím metod

**Graf 6: Vývoj parametru R (míra plodnosti v modálním věku) v České republice od roku 1989**

Development of parameter R (age-specific fertility rate at mode) in the Czech Republic since 1989



Zdroj: ČSÚ, vlastní zpracování.

Source: CZSO, authors' processing.

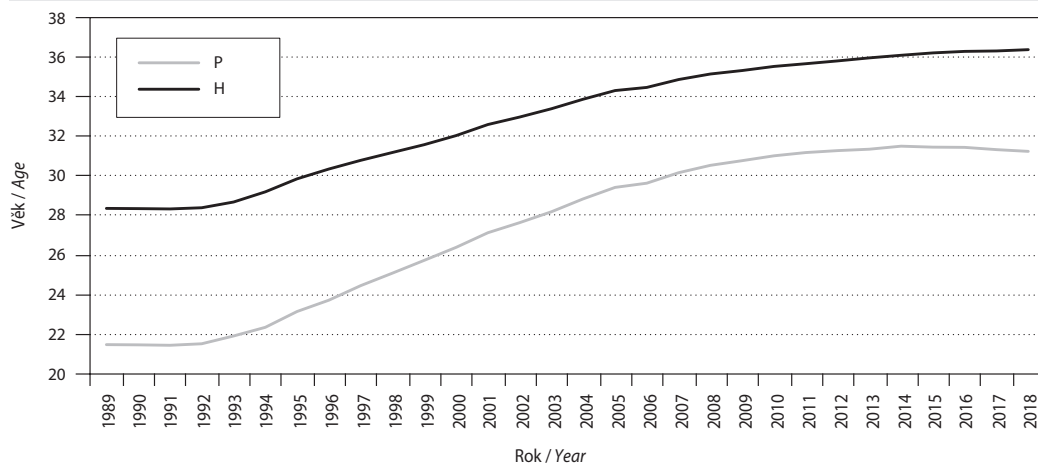
vycházejících z analýzy časových řad. Pomocí těchto metod se odhadnou budoucí hodnoty parametrů, které po dosažení do modelu definují vzhled křivky měř plodnosti podle věku v budoucnu (Lipps – Betz, 2004).

U parametru R je na grafu 6 nejvyšších hodnot dosahováno na začátku sledovaného období,

kdy změny v časování a intenzitě plodnosti v České republice teprve pomalu začínaly nabírat na intenzitě (Sobotka et al., 2008). Celkově velmi nízké míry plodnosti na přelomu tisíciletí jsou potom viditelné i zde, kdy se hodnota parametru pohybovala pod hranici jedné desetiny. V posledních deseti letech

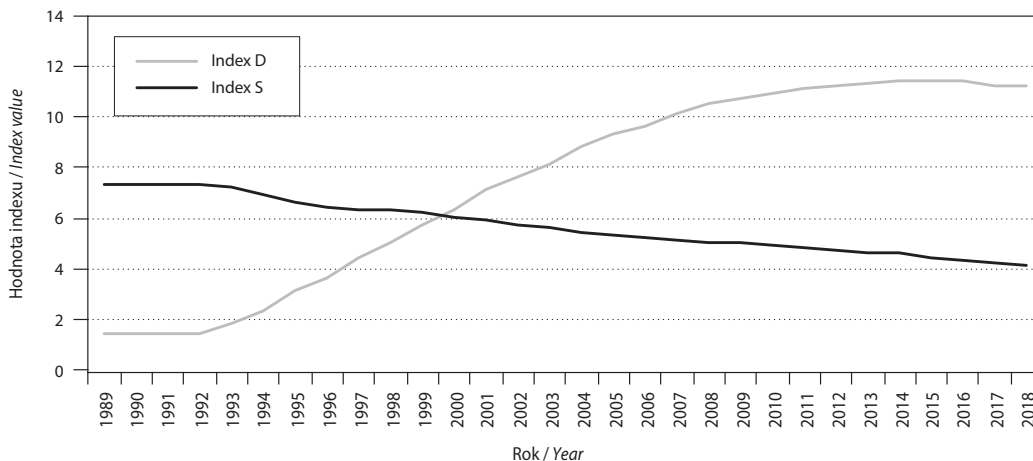
**Graf 7: Vývoj parametrů P (modální věk měř plodnosti podle věku) a H (věk, kdy hodnota míry plodnosti klesne na polovinu po dosažení maxima) v České republice od roku 1989 / Development of parameters P**

(the age at which fertility reaches its peak) and H (the youngest age above P at which fertility falls to half of its peak level) in the Czech Republic since 1989



Zdroj: ČSÚ, vlastní zpracování.

Source: CZSO, authors' processing.

**Graf 8: Vývoj indexů D (index odsunu mateřství) a S (index intenzity pozdní reprodukce) v České republice od roku 1989 / Development of indexes D (delay index) and S (stopping index) in the Czech Republic since 1989**

Zdroj: ČSÚ, vlastní zpracování.

Source: CZSO, authors' processing.

dochází, oproti přelomu tisíciletí, ke zvýšení hodnoty parametru R, což souvisí s celkovým zlepšením úrovně plodnosti v České republice (Fiala et al., 2018).

Na grafu 7 je vidět, že parametry P i H skrz téměř celé sledované období rostou, což není překvapivé vzhledem k postupně rostoucímu průměrnému věku matek na území České republiky (Fiala et al., 2018). Zajímavé je, že parametr H téměř dokonale kopíruje změny během času v parametru P. Příčinu lze opět hledat v tom, že rozdělení měr plodnosti podle věku mezi jednotlivé věky má určitým způsobem biologicky podmíněný tvar, o kterém již byla zmínka výše. Ve výsledku je ovšem možné konstatovat, že zatímco parametr P se během sledovaného období zvýšil zhruba o deset let, parametr H pouze zhruba o osm. Vzdálenost mezi těmito dvěma parametry na ose věku se tedy pod vlivem odsouvání reprodukce do vyššího věku ve výsledku zmenšila.

Na závěr oddílu je, na grafu 8, uveden vývoj indexu odsunu mateřství a indexu intenzity pozdní reprodukce. Také zde jsou patrné skutečnosti uvedené již dříve, jako je odsun modálního věku měr plodnosti dle věku za hranici třiceti let nebo postupné zvyšování intenzity plodnosti ve vyšším věku.

## MOŽNOSTI PREDIKCE BUDOUCÍHO VÝVOJE S VYUŽITÍM QS MODELU

Jak již bylo zmíněno výše, při znalosti vývoje parametrů v minulosti lze provést jejich odhad.

Následně parametry dosadit do modelu a nastínit tak možný vývoj měr plodnosti podle věku v budoucnosti. Je dán předpoklad, že alfa zůstane konstantní. Vývoj ostatních parametrů je potom modelován pomocí příslušných procesů, které slouží k odhadu budoucích hodnot parametrů a jsou součástí metod analýzy časových řad (Lipps – Betz, 2004). K analýze a projekci časových řad parametrů je vhodný program EViews, samotná projektovaná křivka je v návaznosti na tento odhad sestavena v programu RStudio pomocí funkce napsané Schmertmannem (Schmertmann, 2017).

I přes statisticky korektní použití příslušných procesů analýzy časových řad však samozřejmě nemusí být zaručena maximální přesnost projekce sledovaných charakteristik. Jak bylo vidět v přechodím oddílu, například parametry P a H skrz celé sledované období v čase rostly, nicméně v poslední době tento růst podstatně zpomaloval. Proto byla projekce parametrů provedena ve dvou hypotetických scénářích. V prvním je modelována celá časová řada od roku 1989 do roku 2018. Ve druhém potom byla na analýzu časových řad použita velice krátká část od roku 2010 do roku 2018, kdy tempo růstu parametrů P a H zpomalilo. Délka časové řady je u projekce budoucího vývoje plodnosti obecně otázkou, už časovou řadu o třiceti pozorování lze do určité míry považovat za příliš krátkou pro stabilní statistické modelování (O'Donovan, 1983). Je ale také možné dosáhnout realističtějších

**Graf 9: Projekce měr plodnosti podle věku při modelování časové řady od roku 1989**

Projection of age-specific fertility rates in modeling the time series since 1989



Zdroj: ČSÚ, vlastní zpracování.

Source: CZSO, authors' processing.

demografických výsledků v modelování plodnosti České republiky při výrazném zkrácení časových řad (Šimpach, 2015a; Šimpach, 2015b).

Díky tomu bylo na následujících grafech možné ukázat, jak by se vyvíjely míry plodnosti podle věku, za předpokladu platnosti obou scénářů. V případě obou scénářů projekce časové řady vychází z každého roku výše uvedených období.

V tuto chvíli je vhodné upozornit na fakt, že i když jsou v analyzovaném modelu použity moderní statistické postupy, evidentně stále výsledný odhad ve velké míře záleží na subjektivních rozhodnutích výzkumníka. Bylo by možné jednoduše stanovit i další scénáře s předpoklady, jako je například od roku 2025 konstantní parametr P nebo R a výsledky by byly opět rozdílné. Právě tato intuitivnost parametrů, je jednou z výhod modelu, která je navíc velice dobře prakticky využitelná.

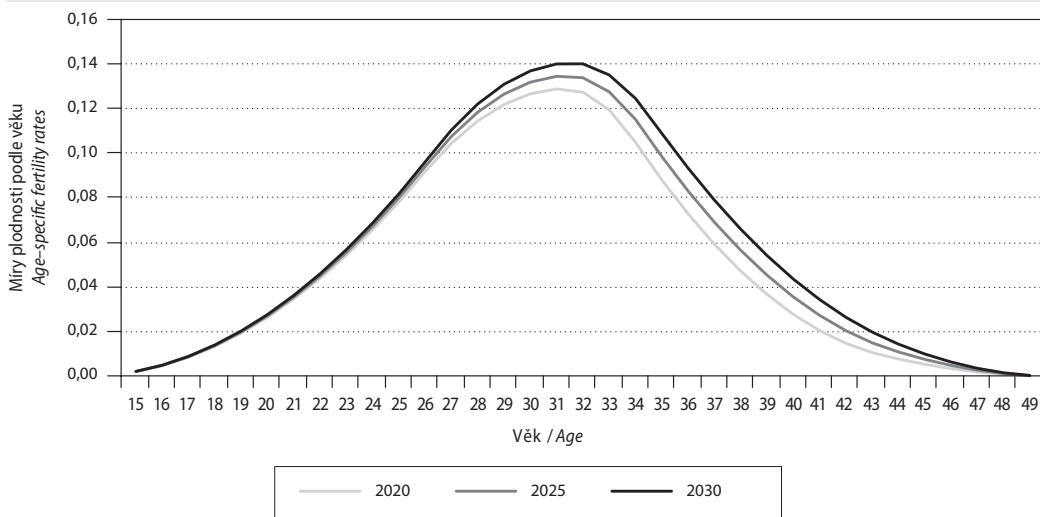
Na grafu 9 je vidět projekce měr plodnosti podle věku na základě analýzy časových řad od roku 1989. Nejvyšší míry plodnosti podle věku se nadále posouvají poměrně rychle do vyššího věku. V roce 2020 by zatím byla ještě nejvyšší úroveň plodnosti žen těsně po dosažení třiceti let věku. Ale v roce 2030 by již nejvyšších měr plodnosti podle věku dosahovaly ženy kolem třiceti pěti let.

Na křivce pro rok 2030 je také vidět, že s nejvyššími mírami plodnosti v takto vysokém věku by souviselo určité zešíkmení rozdělení měr plodnosti podle věku a s tím související rychlý pokles hodnot kolem čtyřiceti let věku. Model se zde nejeví dostatečně flexibilním, aby provedl reálnější odhad plodnosti žen po čtyřicítce v roce 2030. Je třeba zdůraznit, že tento scénář samozřejmě není příliš pravděpodobný. Jak bylo vidět v předchozím oddílu, tempo růstu hodnot parametrů P a H se v posledních letech podstatně snížilo. Lze ho tedy spíše použít pro demonstraci toho, jak by vypadala budoucí situace, za předpokladu pokračování razantních změn v demografickém chování obyvatelstva, jaké probíhaly po sametové revoluci.

Scénář modelování časové řady pouze v části od roku 2010, zobrazený na grafu 10, ukazuje podstatně menší rozdíly v mírách plodnosti podle věku do budoucna. Plodnost žen do pětadvaceti let by se téměř neměnila. Posunul by se věk, kdy je úroveň plodnosti nejvyšší zhruba ke dvaatřiceti letům věku, což se při pohledu na země, ve kterých se začaly objevovat tendence k posunu reprodukce do vyššího věku dříve, jeví poměrně reálné (Murray, 2018). Plynule by také rostly míry plodnosti podle věku žen kolem čtyřiceti let. Celkově se, díky obecně vyšším míram

**Graf 10: Projekce měr plodnosti podle věku při modelování časové řady od roku 2010**

Projection of age-specific fertility rates in modeling the time series since 2010



Zdroj: ČSÚ, vlastní zpracování.  
 Source: CZSO, authors' processing.

plodnosti podle věku u starších žen, dá podle tohoto scénáře očekávat výrazné oživení plodnosti. Vše samozřejmě za předpokladu, že by se sledované parametry vyvíjely podobně, jako v období od roku 2010 do roku 2018. Je opět otázkou, nakolik je reálné další zlepšování parametru R v podobném tempu jako od roku 2010.

Je opět možné, pomocí měr plodnosti podle věku v jednotlivých věcích, dopočítat také ukazatel úhrnné plodnosti. V tab. 4 je vidět, že mezi scénáři není v roce 2020 velký rozdíl. Nadále se již scénáře výrazně liší, podstatně optimističtější je scénář založený na modelování časové řady od roku 2010, který není ovlivněn nízkou plodností na přelomu tisíciletí. Opět

**Tab. 4: Projekce úhrnné plodnosti v budoucnosti, oba scénáře / Projected future total fertility rates, both scenarios**

Scénář / Scenario	Rok / Year		
	2020	2025	2030
Modelování časové řady od roku 1989 / Time series modelling since 1989	1,76	1,77	1,64
Modelování časové řady od roku 2010 / Time series modelling since 2010	1,77	1,91	2,05

Zdroj: ČSÚ, vlastní zpracování.  
 Source: CZSO, authors' processing.

**Tab. 5: Projekce parametrů modelu v budoucnosti, oba scénáře / Projected future model parameters, both scenarios**

Parametr / Parameter	Modelování časové řady 1989–2018 Time series modelling 1989–2018			Modelování časové řady 2010–2018 Time series modelling 2010–2018		
	2020	2025	2030	2020	2025	2030
R	0,126	0,128	0,130	0,128	0,134	0,140
P	31,219	32,440	35,666	31,314	31,454	31,595
H	36,660	37,437	38,523	36,604	37,131	37,659

Zdroj: ČSÚ, vlastní zpracování.  
 Source: CZSO, authors' processing.

**Tab. 6: Projekce indexů vypočtených pomocí QS modelu v budoucnosti, oba scénáře**

Projected future indexes calculated using the QS model, both scenarios

Ukazatel Index	Modelování časové řady 1989–2018 Time series modelling 1989–2018			Modelování časové řady 2010–2018 Time series modelling 2010–2018		
	2020	2025	2030	2020	2025	2030
D	11,2	12,4	15,7	11,3	11,5	11,6
S	4,0	3,8	4,3	4,1	3,6	3,1

Zdroj: ČSÚ, vlastní zpracování.

Source: CZSO, authors' processing.

je však třeba upozornit, že smyslem této projekce je spíše upozornit na to, jak by situace vypadala za předpokladu pokračování současných trendů. Je samozřejmě otázkou, zda bude růst parametru R, opravdu pokračovat až do roku 2030 a úhrnná plodnost se díky tomu dostane až nad hranici dvou živě narozených dětí na jednu ženu během jejího reprodukčního období při neměnných mírách plodnosti.

Opět pro úplnost, ještě stručný komentář k parametrům, podle kterých byly budoucí míry plodnosti podle věku odhadnuty u obou scénářů. Tyto parametry jsou uvedeny v tab. 5. Pokud je modelována časová řada už od roku 1989 začne se v roce 2030 věk, kdy je úroveň plodnosti nejvyšší, charakterizovaný parametrem P, blížit šestatřiceti letům věku.

To se logicky nezdá moc pravděpodobné, nicméně je z demografického hlediska vhodné podívat se na situaci v evropských státech bez socialistické minulosti. Za tímto účelem jsou níže popsány výsledky z tab. 7. Je možné očekávat, že ve výsledných hodnotách parametrů se může zdejší situace postupně přibližovat právě západním státům (*Van de Kaa, 2002*).

Jak bude popsáno níže, parametry se však často i mezi těmito státy výrazně liší.

Ve druhém scénáři, kde bylo vycházeno z časové řady pouze od roku 2010, kdy již změny v časování mateřství neprobíhaly tak rychle, je i další vývoj parametrů P a H o mnoho pomalejší, naopak parametru R roste z již uvedených důvodů podstatně rychleji.

Tab. 6 ukazuje, že také modelem odhadnuté indexy pro charakterizování časování mateřství v populaci, by měly v budoucnu pokračovat v podobném vývoji jako dosud. Rychlost změn se opět liší dle scénáře.

Zajímavý je i vývoj věnující se indexu S. U obou scénářů zde pokračuje pokles v dosažených hodnotách oproti minulosti. Nicméně na rozdíl od indexu D, je zde v obou scénářích pokles téměř stejně pomalý. Výjimku tvoří rok 2030 ve scénáři modelování plodnosti od roku 1989, kdy tento index oproti roku 2025 poměrně výrazně vzroste, může to být však způsobeno již výše zmíněnou nedostatečnou flexibilitou modelu v tomto případě.

V demografii se samozřejmě nelze spoléhat bezvýhradně na to, že se podaří změny v lidských hodnotách a z nich vycházející změny v reprodukčním

**Tab. 7: Parametry QS modelu a úhrnná plodnost ve vybraných Evropských zemích za rok 2016**

Parameters of the QS model and total fertility rate in selected European countries for the year 2016

Ukazatel Index	Země / Country								
	Česká republika Czech republic	Rakousko Austria	Dánsko Denmark	Spojené království United Kingdom	Francie France	Nizozemsko Netherlands	Španělsko Spain	Švédsko Sweden	Švýcarsko Switzerland
R	0,121	0,110	0,145	0,121	0,140	0,139	0,097	0,139	0,120
$\alpha$	12,421	13,427	17,471	10,302	15,136	17,793	13,158	15,780	15,854
P	31,473	31,605	31,259	31,920	30,882	32,026	34,537	31,436	33,186
H	36,312	37,082	36,444	37,544	36,599	36,719	38,869	37,077	37,904
Úhrnná plodnost / TFR	1,642	1,529	1,786	1,810	1,888	1,663	1,337	1,853	1,546

Zdroj: Human Fertility Database, vlastní zpracování.

Source: Human Fertility Database, authors' processing.

**Tab. 8: Indexy vypočtené pomocí QS modelu ve vybraných Evropských zemích za rok 2016**

Indexes calculated using the QS model in selected countries of the European Union for the year 2016

Ukazatel Index	Země / Country								
	Česká republika Czech republic	Rakousko Austria	Dánsko Denmark	Spojené království United Kingdom	Francie France	Nizozemsko Netherlands	Španělsko Spain	Švédsko Sweden	Švýcarsko Switzerland
D	11,5	11,6	11,3	11,9	10,9	12,0	14,5	11,4	13,2
C	4,4	3,7	4,2	3,4	3,8	4,3	3,4	3,6	3,7

Zdroj: Human Fertility Database, vlastní zpracování.

Source: Human Fertility Database, authors' processing.

chování obyvatel zachytit matematickou funkcí. Proto je pro představu, kam Česká republika směřuje, užitečné podívat se ve stručnosti také na hodnoty parametrů, které jsou dosahovány ve státech bez socialistické minulosti.

Pro srovnání byly vybrány země na Human Fertility Database, u kterých jsou dostupné míry plodnosti podle věku alespoň za rok 2016. K parametrům modelu byla do tabulky přidána úhrnná plodnost každého z uvedených států tak, aby bylo ve stručnosti možné bez dalšího dohledávání vidět, jaké úrovně plodnosti je právě v každém ze států dosahováno, všechny tyto skutečnosti jsou uvedeny v tab. 7.

Bohužel, při pohledu na tyto země je nejdříve nutné konstatovat, že hodnota parametru R, který v České republice vykazuje nejvíce rozkolísaný vývoj, se mezi zeměmi výrazně mění. Těžko tedy usuzovat do jaké míry je aktuální zvyšování jeho hodnot s tendencí vzrůst na úroveň 0,13 v budoucnosti reálné. Naopak nepravděpodobně se díky pohledu na ostatní země jeví předpoklad budoucího zvyšování parametru P na hodnotu téměř třiceti sedmi. Lze konstatovat, že projekce scénářem modelujícím časovou řadu pouze od roku 2010, se jeví z hlediska časování mateřství reálnější, než druhá varianta.

Co se úhrnné plodnosti týká, většina srovnávaných zemí dosahuje hodnot okolo 1,7 a 1,8. Naopak růst úhrnné plodnosti nad úroveň dvou, se tedy jeví poměrně nereálný. Jsou zde však i země s úhrnnou plodností o několik desetin nižší a je samozřejmě stále otázkou na jaké úrovni se nakonec úhrnná plodnost ustálí v České republice. Například aktuální projekce obyvatelstva České republiky předpokládá ve své střední variantě v roce 2030 úhrnnou plodnost na úrovni 1,72 (ČSÚ, 2018).

Zpoždění rekuperace charakterizované indexem odsunu mateřství se i u většiny zemí uvedených v tab. 8 pohybuje kolem jedenácti až dvanácti let. Dá se tedy říci, že nejčastější je ve sledovaných evropských zemích reprodukce kolem třiceti dvou let. Další růst někam k šestnácti letům zpoždění oproti hranici dvaceti let, který vychází při předpovědi roku 2030, se nezdá jako příliš pravděpodobná varianta. Ze všech zemí je zde nejvyšší index u Španělska a ani tam se zdaleka nepřibližuje hodnotě šestnácti let.

Co se indexu intenzity pozdní reprodukce týká, podle situace ve srovnávaných zemích, se zdá stejně jako při projekci pomocí analýzy časových řad pravděpodobný pokles na hodnotu kolem tří až čtyř let.

## ZÁVĚR

Celkové změny v úrovni plodnosti kladou nové nároky na modelování jejího vývoje a projektování jejího možného budoucího vývoje. V textu byl představen a zejména vyzkoušen na datech Českého statistického úřadu za Českou republiku QS model, který patří mezi moderní statistické přístupy určené k hloubkové analýze plodnosti.

Ukázalo se, že model je na základě odhadnutých parametrů schopen poměrně dobře interpolovat míry plodnosti podle věku českých žen. I přes drobné odchylky od skutečných hodnot se v žádném ze sledovaných let nedal model označit jako nevhodný k modelování rozdělení sledovaných charakteristik.

Dále byl pohled zaměřen na vývoj parametrů tohoto modelu v České republice od změny politického zřízení v roce 1989. Míra plodnosti v modálním věku P se posunula do podstatně vyššího věku a naopak její hodnota charakterizovaná parametrem R celkem výrazně poklesla.

Na závěr bylo ukázáno, jak je možné QS model využít v praxi k demografickým projekcím. Pomocí odhadu parametrů do roku 2030 zde byly ukázány dva scénáře možného budoucího vývoje rozdělení měr plodnosti podle věku. Na základě scénářů se jeví, že věk, kdy je míra plodnosti podle věku žen nejvyšší v budoucnu ještě o trochu vzroste. Obecně je možné usuzovat i na vyšší plodnost žen kolem čtyřiceti let věku. Ovšem díky závěrům plynoucím z oddílu věnujícího se historickému vývoji parametrů je také možné konstatovat, že změny v reprodukčním chování žen se na území České republiky v poslední

době výrazně zpomalují. Na základě této skutečnosti a pohledu na situaci v zemích bez socialistické minulosti se jeví, zejména z hlediska časování mateřství, pravděpodobnější scénář založený na modelování velice krátké časové řady od roku 2010. Z toho se současně také ukazuje, jak výrazně se mohou výsledné projekce lišit podle toho jak dlouhá časová řada parametrů je modelována. Není tedy možné od tohoto modelu očekávat, že by dokázal při odhadu budoucího vývoje nahradit kvalifikovaný odhad. Nicméně jak bylo vidět výše, je pro demografy při analýze plodnosti nepochybně užitečným nástrojem.

## Poděkování

Příspěvek vznikl za podpory Grantové agentury České republiky v rámci projektu „*Ekonomika úspěšného stárnutí*“ GAČR 19-03984S.

## Literatura

- Booth, H. 1984. Transforming Gompertz's function for fertility analysis: the development of a standard for the relational Gompertz function. *Population Studies*, 38(3), s. 495–506.
- Brass, W. 1960. The graduation of fertility distributions by polynomial functions. *Population Studies*, 14(2), s. 148–162.
- Cilek, L. – Chowell, G. – Fariñas, D. 2018. *Estimating Baseline Mortality from Limited Data: A Comparison of Approaches to Quantify the Effects of Spanish Influenza in Madrid* [online]. [cit. 3.3.2019]. Dostupné z: <<https://demografove.estranky.cz/en/articles/conferences/9th-demographic-conference-of-young-demographers-----presentations-and-online-discussion-forum.html>>.
- Coale, A. J. – Trussell, T. J. 1974. Model fertility schedules: variations in the age structure of childbearing in human populations. *Population Index*, 40(2), s. 185–258.
- ČSÚ. 2018. *Projekce obyvatelstva České republiky 2018–2100* [online]. [cit. 3.5.2019]. Dostupné z: <<https://www.czso.cz/csu/czso/projekce-obyvatelstva-ceske-republiky-2018-2100>>.
- De Beer, J. 2011. A new relational method for smoothing and projecting age-specific fertility rates: TOPALS. *Demographic Research*, 24(18), s. 409–454.
- Ediev, D. 2013. *Contribution of fertility model and parameterization to population projection errors*. Roma: Wittegenstein Centre.
- Fiala, T. – Langhamrová, J. – Pechholdová, M. – Ďurček, P. – Šprocha, B. 2018. Population development of Czechia and Slovakia after 1989. *Demografie*, 60(3), s. 202–218.
- Gilks, W. R. 1986. The relationship between birth history and current fertility in developing countries. *Population Studies*, 40(3), s. 437–455.
- Gupta, P. 2012. *A study on age patterns of fertility in India: Fertility Transition in India*. Riga: LAP Lambert Academic Publishing.
- Hadwiger, H. 1940. Eine analytische Reproduktionsfunktion für biologische Gesamtheiten. *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, 23, s. 101–113.
- Hoem, J. M. – Madsen, D. – Nielsen, J. L. – Ohlsen, E. M. – Hansen, H. O. – Rennermalm, B. 1981. Experiments in modeling recent Danish fertility curves. *Demography*, 18(2), s. 231–244.
- Hon, F. 2020. Fertility in the Czech Republic and its modeling. In: *Sborník prací účastníků vědeckého semináře doktorského studia FIS*, Praha: VŠE, s. 17.
- Chandola, T. – Coleman, D. A. – Hiorns, R. W. 1999. Recent European fertility patterns: fitting curves to 'distorted' distributions. *Population Studies*, 53(3), s. 317–329.
- Lanzieri, G. 2011. *Fewer, older and multicultural? Projections of the EU populations by foreign/national background*. Luxembourg: Publications Office of the European Union.



- Lipps, O. – Betz, F. 2004. *Stochastic Population Projection for Germany – based on the Quadratic Spline approach to modelling age-specific fertility rates*. Mannheim: Research Institute for the Economics of Aging.
- Mazur, D. P. 1963. A demographic model for estimating age-order specific fertility rates. *Journal of the American Statistical Association*, 58(303), s. 774–788.
- McNeil, D. R. – Trussell, T. J. – Turner, J. C. 1977. Spline interpolation of demographic data. *Demography*, 14(2), s. 245–252.
- Mishra, R. – Singh, K. K. – Singh, A. 2017. A model for age-specific fertility rate pattern of India using skew-logistic distribution function. *American Journal of Theoretical and Applied Statistics*, 6(1), s. 32–37.
- Murray, Ch. (ed.) 2018. *Population and fertility by age and sex for 95 countries and territories, 1950–2017: a systematic analysis for the Global Burden of Disease Study 2017* [online]. [cit. 30.1.2019]. Dostupné z: <<https://www.thelancet.com/action/showPdf?pii=S0140-6736%2818%2932278-5>>.
- O'Donovan, T. M. 1983. *Short term forecasting: an introduction to the Box-Jenkins approach*. West Sussex: Wiley.
- Peristera, P. – Kostaki, A. 2007. Modeling fertility in modern populations. *Demographic Research*, 16(6), s. 141–194.
- Romaniuk, A. 1973. A three parameter model for birth projections. *Population Studies*, 27(3), s. 467–478.
- Schmertmann, C. 2003. A system of model fertility schedules with graphically intuitive parameters. *Demographic Research*, 9(5), s. 81–110.
- Schmertmann, C. 2005. Quadratic spline fits by nonlinear least squares. *Demographic Research*, 12(5), s. 105–106.
- Schmertmann, C. 2017. *Quadratic Spline Interpolation of Fertility Schedules* [online]. [cit. 20.1.2019]. Dostupné z: <[http://fsu.schmert.net/ecp5117/QS\\_examples.html](http://fsu.schmert.net/ecp5117/QS_examples.html)>.
- Sobotka, T. – Štašná, A. – Zeman, K. – Hamplová, D. – Kantorová, V. 2008. Czech Republic: a rapid transformation of fertility and family behaviour after the collapse of state socialism. *Demographic Research*, 14(19), s. 403–454.
- Šimpach, O. 2015a. Application of the modern approach to age-specific fertility rates stochastic modelling in the Czech Republic. In: *Mathematical Methods in Economics 2015*, Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, s. 799–804.
- Šimpach, O. 2015b. Fertility of Czech females could be lower than expected: trends in future development of age-specific fertility rates up to the year 2050. *Statistika*, 95(1), s. 19–37.
- Van de Kaa, D. 2002. *The Idea of a Second Demographic Transition in Industrialized Countries Paper presented at the Sixth Welfare Policy Seminar of the National Institute of Population and Social Security* [online]. [cit. 2.2.2019]. Dostupné z: <<https://pdfs.semanticscholar.org/17c8/c2c3b43d447474107554926eb289d269c939.pdf>>.
- Wicksell, S. D. 1931. Nuptiality, fertility, reproductivity. *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, 14(3), s. 125–157.

## FILIP HON

Je absolventem Fakulty informatiky a statistiky VŠE v Praze. Od roku 2018 je členem Katedry demografie VŠE v Praze a výzkumným pracovníkem VÚPSV v Praze. Zabývá se demografickým prognózováním, výzkumem plodnosti a sociální ochranou.

## JITKA LANGHAMROVÁ

Vystudovala Vysokou školu ekonomickou v Praze. V současnosti je vedoucí Katedry demografie na Fakultě informatiky a statistiky na Vysoké škole ekonomické v Praze. Specializuje se na výzkum v oblasti stárnutí populace, sociální a regionální demografii. Je autorkou řady odborných knih, výzkumných studií a učebních textů.

## SUMMARY

Changes in fertility rates put new demands on modelling fertility development and forecasting its possible future development. This article introduces the Schmertmann QS model and tests it on data

for the Czech Republic. This model is a modern statistical method that is designed to advance fertility analysis.

The model was able to interpolate the specific fertility rates of Czech women on the basis

of estimated parameters well. Despite slight deviations from the actual values, in none of the studied years could the model be described as inappropriate for modelling the distribution of the observed characteristics.

The next section was devoted to the development of parameters since the change in the political system in 1989. Not surprisingly, the social shifts connected with this change had a significant effect on these parameters. The age at which the specific fertility rate was highest shifted to a much higher age, while, by conversely, this rate dropped significantly.

In conclusion, the article showed how the QS model can be used in practice for the purpose of demographic forecasting. By estimating the parameters to 2030, two scenarios of possible future trends in the distribution of specific fertility rates were presented here. Based on these scenarios, the age at which the specific fertility of women peaks will rise slightly in the future.

In general, it is possible to assume there will be even higher fertility rates for women around the age of 40. However, the findings from the section devoted to the historical development of parameters indicate that pace of changes in the reproductive behaviour of women in the Czech Republic has recently slowed significantly. Based on this fact and on the situation in countries where the second demographic transition started earlier, the scenario based on the modelling of a short time series since 2010 seems to be more likely, especially in terms of fertility timing. This also shows how significantly the resulting projections may differ depending on how long the time series are modelled. Therefore, it is not possible to expect that this model will be able to replace a qualified estimate in the interpolation of future developments. However, as shown above, it is undoubtedly a useful tool for demographers in fertility analysis.